

# § ОБ КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА, ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

Вяткин С.И.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАДАНЫХ ФОРМ

**Аннотация:** Объектом исследования являются геометрические преобразования функционально заданных трехмерных форм. Предлагается описание геометрических объектов с помощью функционального задания и реализация методов преобразования описывающей функции для геометрических операций: проецирования, офсеттинга, теоретико-множественных и метаморфозиса (в том числе и морфинг негеометрических объектов). А также более сложных геометрических операций: замещение движущимся твердым телом и кручение тел. Функциональное представление наиболее точно из всех существующих описывает геометрию объекта и имеет наименьший размер данных, необходимых для описания геометрии объекта. Функциональное описание демонстрирует компактность и гибкость задания поверхностей и объектов, являющихся результатами логических операций над объемами. При функциональном задании объектов появляется возможность реализации новых эффектов над ними, обусловленная введением операций над функциями. Это может быть удобно при моделировании некоторых сложных движений тел, частиц при разработке как научных, так и игровых приложений. Метод исследования базируется на использовании системного и целевого подхода при оценке алгоритмических решений, теории множеств и аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и векторной алгебры, теории интерполяции и теории матриц, опирается на математическое моделирование и теорию вычислительных систем. Основными выводами проведенного исследования являются: возможность реализации сложных геометрических операций (метаморфозис, проекции, офсеттинг, кручение, замещение) над объектами; предложенный способ описания объектов трехмерных сцен базовыми поверхностями и функциями возмущения в сравнении с известными способами задания функционально заданных объектов имеет более компактное описание; алгоритм рендеринга в сравнении с известными алгоритмами определяет точки поверхности функционально заданных объектов за меньшее время за счет меньшего количества вычислений; при предложенном функциональном задании объектов упрощается реализация перечисленных выше геометрических операций над функциями возмущения.

**Ключевые слова:** Геометрические объекты, Геометрические операции, Функции воз-

мущения, Квадрики, Определение столкновений, Трехмерный морфинг, Теоретико-множественные операции, Локальная деформация, Глобальная деформация, Визуализация

## 1. Введение

Наиболее распространенная модель для визуализации трехмерных изображений – полигональное приближение. Наряду с множеством преимуществ, такая модель имеет и свои недостатки. Моделируя реальные объекты, строится приближенная полигональная модель. Для увеличения качества изображения чаще всего необходимо увеличивать количество полигонов. Увеличение количества полигонов, влечет за собой увеличение времени визуализации и объема используемой памяти. К тому же, дополнительные проблемы вносит изменение масштаба объекта, потому что нельзя быстро и эффективно изменить количество полигонов для модели объекта. Также сложно осуществлять геометрические преобразования полигональных объектов. От таких недостатков можно избавиться, применяя функциональное задание объектов и растеризацию их при помощи алгоритмов трассировки лучей.

В ряде работ [1-6] показаны функциональные способы описания объектов, позволяющие существенно, в сравнении с полигональным заданием, сократить объем баз данных для определенного класса моделей. Однако отображение в реальном времени объектов, заданных таким способом, связано с существенным ростом требуемых вычислений из-за высокого порядка описывающих функций.

Известны следующие функциональные способы задания примитивов. Поверхности свертки [2-4] – это интегральное представление неявно заданных поверхностей, известных в компьютерной графике как капельные модели [5, 6], метасферы [7], мягкие объекты [8]. Данные поверхности сочетают в себе гибкость капельных моделей и компактность скелетных моделей [9]. В то же время, они имеют свои недостатки, к которым можно отнести сложность вычисления точек поверхности.

Для визуализации функционально заданных объектов известны методы трассировки лучей, отметим их достоинства и недостатки. *Маршировка по лучу* [10, 11]. Это метод «грубой силы» пошаговых вычислений вдоль луча, функция  $f(t)$  вычисляется на каждом шаге. Первое изменение знака функции  $f(t)$  сигнализирует о том, что найдена поверхность  $F(r) = f(t) = 0$ . Главный недостаток этого метода заключается в том, что он очень медленный и не гарантирует обнаружение поверхности. *Метод LG – поверхности* [12]. Разработан метод обнаружения поверхности с применением  $L$ - и  $G$ - параметров, которые являются константами Липшица для функции  $f$  и производной  $df/dt$  вдоль луча. Для неалгебраической функции  $f$  вычисления  $L$ - и  $G$ - параметров становятся сложными. *Сфера-трэйсинг* [13]. Недостаток заключается в том, что нахождение подходящего радиуса нетривиальная задача. *Трассировка луча с анализом интервала* [14]. Для сложных функций требуется много вычислений для каждого луча индивидуально и для каждого интервала вдоль этого луча. *Быстрая трассировка луча* [15]. Данный метод лишен недостатков перечисленных выше методов, однако поиск лучей, пересекающих

поверхности сложен и не достаточно эффективен, поскольку способы кластеризации этого метода не решают данную проблему полностью.

В данной статье приводятся результаты исследований по моделированию геометрических преобразований трехмерных форм с применением функций возмущения.

## 2. Геометрические объекты

Функционально заданные поверхности строятся из поверхностей второго порядка с аналитическими функциями возмущения, благодаря чему достигается высокий коэффициент геометрического сжатия высокореалистичных трехмерных объектов (рис. 4 и 5). Предлагается описывать геометрические объекты (свободные формы), задавая функцию отклонения (второго порядка) от базовой поверхности второго порядка (квадрики). Функция задается алгебраическим неравенством второй степени с тремя неизвестными  $x, y, z$  в виде  $F(X) \geq 0$ . Рассматриваются поверхности как замкнутые подмножества Эвклидова пространства  $E^n$ , определяемые описывающей функцией  $F(X) \geq 0$ . Где  $F$ - непрерывная вещественная функция.  $X = (x_1, x_2, x_3)$  – задаваемая координатными переменными точка в  $E^n$ . Здесь  $F(X) > 0$  задает точки внутри поверхности,  $F(X) = 0$  – точки на границе и  $F(X) < 0$  – точки, лежащие снаружи и не принадлежащие поверхности.

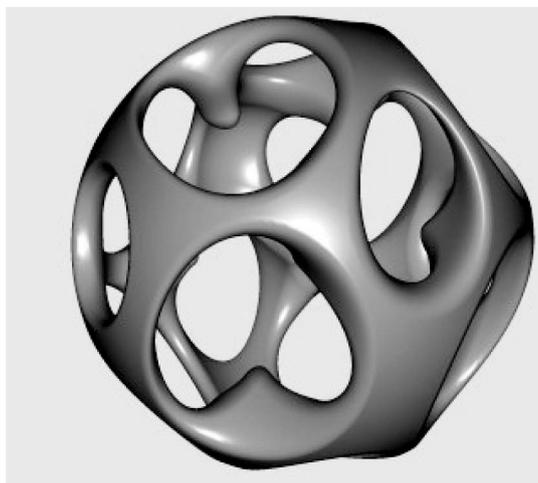


Рис. 1. Функционально заданный объект на основе одной квадрики и нескольких функций возмущения

*Функции возмущения в неявном виде.* Предлагается описывать сложные геометрические объекты, задавая функцию отклонения (второго порядка) от базовой квадрики в виде:

$$F(x, y, z) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{13}xz + A_{23}yz + A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z +$$

$$A_{44} \geq 0$$

(1)

На базе квадрик строятся свободные формы. Свободная форма есть композиция базовой квадрики и возмущений [16]

$$F'(x, y, z) = F(x, y, z) + \sum_{i=1}^N f_i * R_i(x, y, z) \quad (2)$$

где  $R(x, y, z)$  – возмущение,  $f_i$ - форм-фактор .

$$R_i(x, y, z) = \begin{cases} Q_i^3(x, y, z), & \text{if } Q_i(x, y, z) \geq 0 \\ 0, & \text{if } Q_i(x, y, z) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $Q(x, y, z)$  – возмущающая квадратика.

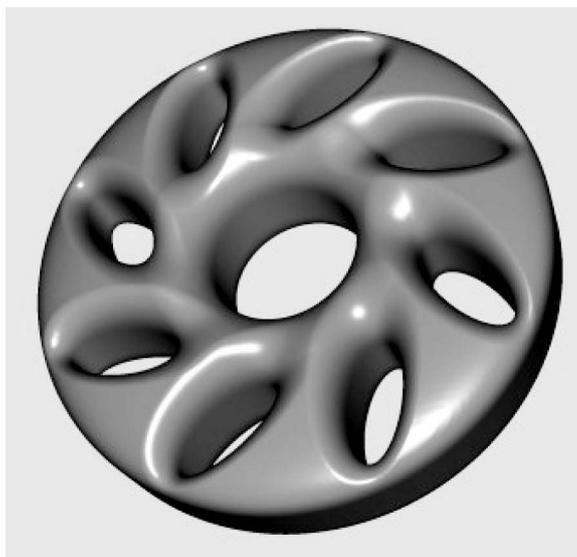


Рис. 2. Функционально заданный объект

В качестве  $Q$  так же может быть возмущенная квадратика (свободная форма). Другими словами, композиция базовой квадратика и функции отклонения являются новой функцией возмущения, т.е. производной для другой базовой квадратика.

Так как  $\max[Q + R] \leq \max[Q] + \max[R]$ , то для оценки максимума  $Q$  на некотором интервале необходимо вычислить максимум функции возмущения на этом же интервале. Получающаяся поверхность будет гладкой (рис. 1), и потребуется небольшое количество функций возмущения для создания сложных форм поверхностей (рис. 2). Степень возмущения (3) можно выбирать произвольно. От этого будет зависеть гладкость переходов от базовой поверхности до области с возмущением, и соответственно, размер самого возмущения. Для того чтобы поверхность была гладкой, степень должна быть больше двух. Это условие гарантирует непрерывность функции и её производной. Таким образом, задача конструирования объекта сводится к задаче деформации базовой поверхности нужным образом, а не к аппроксимации ее примитивами.

### 3. Преобразования трехмерных форм

Одними из положительных свойств функционально заданных объектов в сравнении с другими методами задания моделей являются простота и эффективность их геометрических преобразований, в частности, трехмерный морфинг и определение столкновений объектов. Наличие надежного и быстрого алгоритма определения столкновений актуально для приложений с применением трехмерных манипуляторов-джойстиков (haptic-интерфейс).

Множество геометрических операций  $\Phi$  математически выражается следующим образом.

$$\Phi_j: M^1 + M^2 + \dots + M^n \rightarrow M, \quad (4)$$

где  $n$  – номер операнда операции.

Реализованы следующие операции для объектов на базе функций возмущения: проекции, офсеттинг, метаморфозис, кручение и заметание движущимся твердым телом. Пусть объекты  $G_1$  и  $G_2$  определены как  $f_1(X) \geq 0$  и  $f_2(X) \geq 0$ . Бинарная операция ( $n=2$ ) (4) объектов  $G_1$  и  $G_2$  означает операцию  $G_3 = \Phi_i(G_1, G_2)$  с определением:

$$f_3 = \psi(f_1(X), f_2(X)) \geq 0, \quad (5)$$

где  $\psi$  - непрерывная вещественная функция двух переменных.

Для того чтобы создать сложную сцену, необходимо в ней описать какое-то определённое количество примитивов, необходимых для конкретной задачи. Отображаемый объект, с которым алгоритм растривования осуществляет взаимодействие посредством запросов, представляет собой всю трёхмерную сцену. Поэтому геометрическая модель должна позволять конструировать объекты и их композиции неограниченной сложности. Достигается это в первую очередь применением булевых операций (рис. 3, 4 и 5).

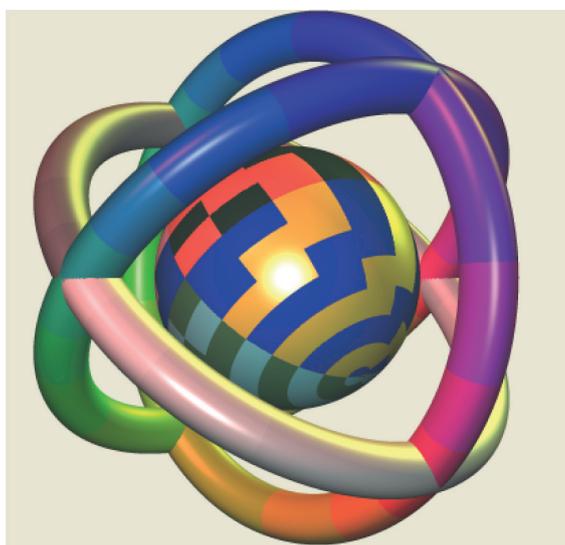


Рис. 3. Теоретико-множественные операции над объектами

Эти операции не изменяют степень функций заданных моделей. Операции состоят из двух ссылок к другим отображаемым объектам. Вся сцена представляет вид дерева, каждый узел которого является объектом-конструктором, осуществляющим логические операции над своими потомками, а вершинами дерева являются примитивы, используемые системой. В момент, когда при растривании происходит обращение с каким-либо запросом к объекту-конструктору, этот объект обращается к своим потомкам, преобразует полученный результат и выдаёт соответствующий ответ на запрос. При этом потомком может являться как примитив, так и другой объект-конструктор.

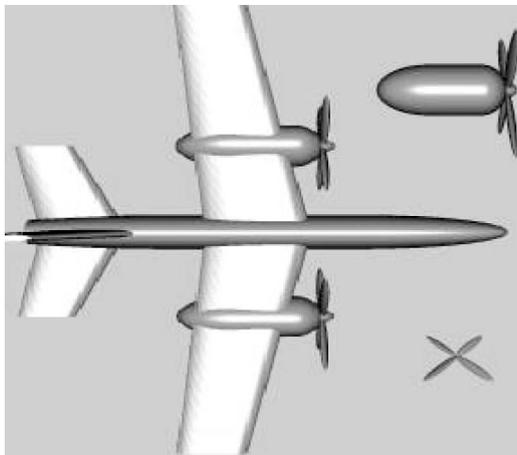


Рис. 4. Сложный и простые геометрические объекты

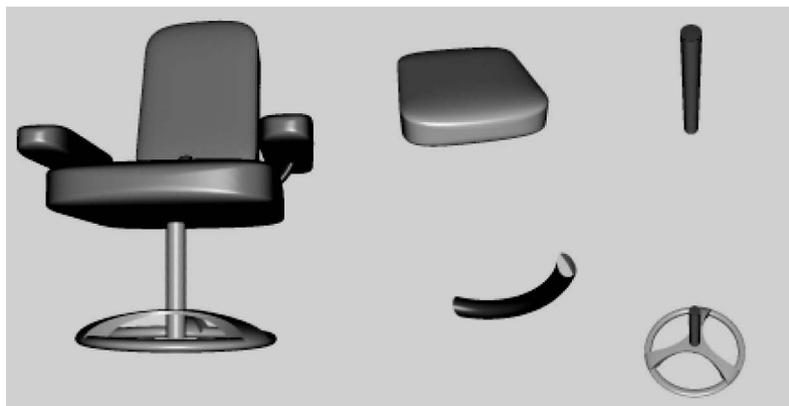


Рис. 5. Сложный и простые геометрические объекты

### 3.1 Проекция.

Проекция тела на три ортогональные плоскости дают нам представление о разных его сторонах. Проекция трехмерного тела на координатную плоскость рассмотрена как объединение сечений тела плоскостями параллельных данной координатной плоскости на достаточно малом расстоянии друг от друга. Дадим математическое описание этому процессу для произвольной размерности пространства.

Пусть исходный объект  $G_1 \subset E_n$  описывается функцией  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq 0$ , а

его проекция  $G_2 \subset E_{n-1}$  описывается функцией  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$ . Объект  $G_2$  может быть определен как объединение сечений объекта  $G_1$  гиперплоскостью  $x_i = C_j$ , где  $C_{j+1} = C_j + \Delta x_i, j=1, N$  и  $C_1 = x_{imin}$ . Пусть  $f_{ij} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, C_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$  – функция для сечения. В итоге функция для проекции при  $\Delta x_i \rightarrow 0$  есть объединение всех функций  $f_{ij}$ :

$$f_2 = f_{11} \vee f_{12} \vee \dots \vee f_{ij} \vee \dots \vee f_{iN}. \quad (6)$$

### 3.2 Оффсеттинг

Операция оффсеттинга реализована в виде преобразований, задающих свободную форму функций путем преобразования коэффициентов квадрик. С помощью данной операции можно создавать увеличенную или уменьшенную копию исходного объекта, то есть делать положительный или отрицательный оффсеттинг соответственно. Например, можно имитировать пульсацию тела. Пусть исходный объект задается функцией  $f(X) > 0$ , тогда при применении такой операции полученное тело будет описываться функцией  $F = f(X) + C$ , где  $C > 0$  – положительный оффсеттинг (расширение).

### 3.3 Кручение

Кручение это деформация тела, являющаяся частным случаем биективного отображения. Биективное отображение служит для определения деформаций исходных объектов. Для кручения исходного тела мы находили его координаты  $x, y, z$ , и подвергали их преобразованию:

1. кручение вокруг оси  $Z$ :  $t = (z - z_1) / (z_2 - z_1), \quad (7)$

$$\theta = (1-t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (8)$$

$$x_{new} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (9)$$

$$y_{new} = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (10)$$

где  $z_1, z_2$  – координаты концов на  $z$ -интервале,  $\theta_1, \theta_2$  – углы вращения в радианах для конечных точек.

2. кручение вокруг оси  $Y$ :  $t = (y - y_1) / (y_2 - y_1), \quad (11)$

$$\theta = (1-t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (12)$$

$$z_{new} = z \cos \theta + x \sin \theta, \quad (13)$$

$$x_{new} = -z \sin \theta + x \cos \theta, \quad (14)$$

где  $y_1, y_2$  – координаты концов на  $y$ -интервале,  $\theta_1, \theta_2$  – углы вращения в радианах для конечных точек.

3. кручение вокруг оси  $X$ :  $t = (x - x_1) / (x_2 - x_1), \quad (15)$

$$\theta = (1-t)\theta_1 + t\theta_2, \quad (16)$$

$$y_{new} = y \cos \theta + z \sin \theta, \quad (17)$$

$$z_{new} = -y \sin \theta + z \cos \theta, \quad (18)$$

где  $x_1, x_2$  – координаты концов на  $x$ -интервале,  $\theta_1, \theta_2$  – углы вращения в радианах для конечных точек.

### 3.4 Морфинг

Операция морфинга преобразует первый заданный объект во второй с получением множества промежуточных форм. Термин происходит от слова metamorphosis – проведение преобразования. Относится к технике анимации, в которой один образ постепенно преобразуется в другой. При метаморфозисе или морфинге осуществляется плавный переход начального образа в конечный (рис. 6). С помощью исходной, конечной и ключевых промежуточных моделей генерируется последовательность кадров преобразования одного объекта в другой.

Пусть мы имеем  $F_1, F_2$  – значения функций возмущения, соответственно, первого и второго объектов, тогда результирующая функция возмущения  $F$  вычисляется следующим образом.

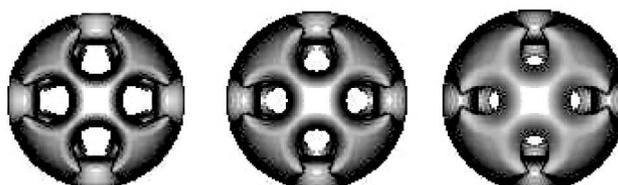
$$F = \beta F_1 + (1 - \beta) F_2, \text{ где } \beta - \text{переменная морфинга, } \beta \in [0 \dots 1]. \quad (19)$$

Переменная морфинга характеризует степень влияния первой и второй функций возмущения на определенный момент времени.



Рис. 6. Морфинг примитивов

При функциональном задании объектов с применением функций возмущения можно осуществлять трехмерный морфинг негомеоморфных объектов (например, тора и сферы) и морфинг с ограничениями без разрыва поверхности и последующего “склеивания” последней (рис. 7). Два тела гомеоморфны, если из исходного тела путем взаимно однозначного непрерывного преобразования описывающей его функции можно получить второе. То есть для негомеоморфных объектов нельзя простым приближением квадратик получить неразрывный метаморфозис. В процессе морфинга могут участвовать не два исходных объекта, а четыре. В этом случае схема интерполяции будет билинейной, а геометрическая операция – кватернарной



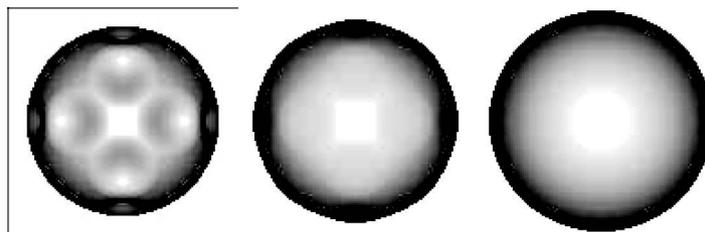


Рис. 7. Морфинг негомеоморфных объектов

### 3.5 Определение столкновений

Одним из примеров отношений может служить определение столкновений между объектами. Бинарное отношение есть множество  $M^2 = M \times M$ . Оно может быть определено как:

$$S_j: M \times M \rightarrow I \quad (20)$$

Обнаружение столкновений достаточно сложная задача, решаемая в различных программах компьютерной графики [17-25]. Это значит, что для каждого анимационного кадра нужно проверять, не пришли ли в соприкосновение (столкновение) какие-либо два объекта. В идеале хотелось бы иметь возможность за минимальное время определять столкновение двух свободных объектов любой сложности. Поскольку контроль столкновений между всеми парами объектов является достаточно ресурсоемким процессом, то обычно такие проверки производятся лишь для части объектов. Часто задача обнаружения столкновений упрощается до проверки того, находится ли заданная точка (принадлежащая одному из объектов) внутри куба, ограничивающего второй объект.

Алгоритм обнаружения столкновений, описанный в [26], основан на отношении пересечения и использует псевдослучайные последовательности Соболя и спиральный квадратичный поиск для обнаружения неотрицательных величин функции, определяющей пересечение. При этом для определения области, в которой ведется поиск, используются ограничивающие тела сферы [27]. В результате работы этого алгоритма столкновение не всегда может быть определено, т.е. алгоритм не гарантирует обнаружения события. А также для разных столкновений требуется разное количество времени, сильно различающееся.

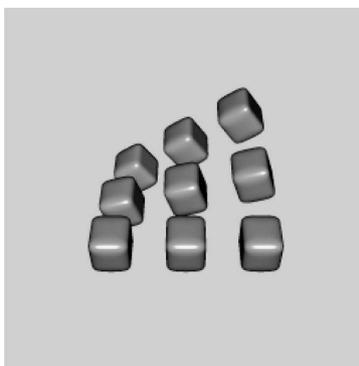


Рис. 8. Определение столкновений функционально заданных объектов на базе функций возмущения

Пусть объекты  $G_1$  и  $G_2$  определены, как  $f_1(X) \geq 0$  и  $f_2(X) \geq 0$ . Бинарная операция пересечения объектов  $G_1$  и  $G_2$  определяется следующим образом:

$$S_c(G_1, G_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_1 \cap G_2 = \emptyset \\ 1, & \text{если } G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (21)$$



Рис. 9. Определение столкновений невыпуклых тел

Функция  $f_3(X) = f_1(X) \& f_2(X)$  может быть использована для вычисления  $S_c$ . Можно утверждать, что  $S_c=0$ , если  $f_3(X) < 0$  для любой точки пространства  $E^n$ .

После вычисления пересечения (21), т.е. применения булевой операции пересечения, поиск точки соприкосновения сталкивающихся объектов осуществляется с помощью алгоритма [28]. С помощью особого теста на пересечение и бинарного поиска можно за постоянное число шагов (определяется заданной точностью) определить точку столкновения объектов, если таковое происходит. В целях расчета времени обнаружения столкновений тестировались объекты, различавшиеся как по степени сложности (форме), так и по виду столкновения (имеется в виду столкновение различными сторонами и частями объектов) (рис. 8 и 9).

### 3.6 Заметание

Заметание движущимся твердым телом является одной из давних и трудных проблем в твердотельном моделировании. Рассмотрим заметание как проекцию движущегося тела из  $4D(x,y,z,t)$  в  $3D(x,y,z)$  пространство. Далее отрисовываем тело каждый раз с новыми координатами, которые изменяли согласно нужному закону. При этом предыдущие полученные изображения сохраняются в памяти и используются для получения результата заметания. Получающаяся фигура это объединение изображений заметающего тела при различных положениях (рис. 10).



Рис. 10. Примеры заметания

### 3.7 Локальная и глобальная деформации

Конструирование объекта сводится к задаче деформации базовой поверхности нужным образом, а не к аппроксимации ее примитивами, то есть данный процесс напоминает лепку модели из пластилина с применением теоретико-множественных операций, представленных в данной работе. Деформация состоит в возможности добавления в любую точку на поверхности возмущение с параметрами задаваемыми *инструментом*. *Инструмент* задает область действия и вид возмущения. Для этого графически предоставлено пользователю некоторая информация (в том числе выделение объекта, например, цветом, или с помощью bounding box, рисование осей и т.д.).

Деформация может быть локальной (рис. 11) и глобальной (рис. 13). На рисунке 12 представлен исходный объект.



Рис. 11. Примеры локальной деформации



Рис. 12. Исходные объекты



Рис. 13. Объекты после глобальной деформации

#### 4. Визуализация

Главным на этом этапе является эффективное нахождение первого пересечения луча с поверхностью. Данная задача сходна с визуализацией объёмных томографических данных, где функция плотности задается в виде дискретных данных. А в нашем случае используется аналитически заданная функция плотности, что позволяет более эффективно осуществлять поиск точек поверхности.

Для вычисления пересечения лучей с поверхностями трехмерных объектов предлагается метод [29], в котором отсутствуют вышеперечисленные недостатки, характерные для рассмотренных ранее известных методов аналитического задания поверхностей.

Для простоты понимания будем считать, что сцена находится в единичном трёхмерном кубе. Перспектива рассматриваться не будет, ввиду того, что она сводится к переходу в другую систему координат. Поэтому опустим начальные преобразования и уделим больше внимания основной части метода. Будем считать, что наблюдатель смотрит вдоль оси  $Z$ . Необходимо получить проекцию сцены на плоскость  $XY$ . Проекция должна представлять собой конечный набор значений. Через плоскость  $XY$  куба проходят лучи, и каждому лучу соответствует пиксел на изображении. Лучи ограничены передней и задней гранями куба. В процессе поиска точки пересечения луча и поверхности, каждый луч делится вдоль оси  $Z$ , образуя набор вокселей. Таким образом, получим функцию плотности вдоль луча, которая зависит от одной переменной. Задача будет состоять в нахождении первой точки, в которой функция обращается в ноль. Найдя такую точку для каждого луча, можно вычислить координату  $Z$ . Далее в каждом пикселе вычисляется нормаль. Имея все координаты и нормали в каждом пикселе, можно использовать модель локального освещения. В итоге получится изображение гладкого объекта с учётом освещения.

#### 5. Заключение

В данной работе рассмотрены преобразования для функционально заданных объектов на базе функций возмущения. Показана возможность реализации сложных геометрических операций (метаморфозис, проекции, офсеттинг, кручение, заметание) над объектами. Предложенный способ описания объектов трехмерных сцен базовыми

поверхностями и функциями возмущения в сравнении с известными способами задания функционально заданных объектов имеет более компактное описание. Алгоритм рендеринга в сравнении с известными алгоритмами определяет точки поверхности функционально заданных объектов за меньшее время за счет меньшего количества вычислений. Кроме того, при предложенном функциональном задании объектов упрощается реализация перечисленных выше геометрических операций над функциями возмущения.

### **Библиография :**

1. Blinn J., A generation of algebraic surface drawing // ACM Transactions on Graphics, 1(3): July 1982, P. 235-256.
2. Bloomenthal J., Shoemake K. "Convolution surfaces", SIGGRAPH'91, Computer Graphics,-1991.-Vol.25.-No.4.-P 251-256.
3. G. Sealy, G. Wyvill. Smoothing of three dimensional models by convolution. In Computer Graphics International'96.- June 1996.-P 184-190.
4. McCormack J., Sherstyuk A. Creating and rendering convolution surfaces. Computing Graphics Forum.-1998.-Vol. 17.-No.2.-P 113-120.
5. J. F. Blinn. A generation of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics.-July 1982.-1(3)-P. 235-256.
6. S. Muraki. Volumetric shape description of range data using "blobby model". Computer Graphics.-July 1991.-25(4)-P. 227-235.
7. H. Nishimura, M. Hirai, T. Kawai, T. Kawata, I. Shirakawa, and K. Omura. Object modelling by distribution function and a method of image generation. The Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan.-1985.-J68-D (4)-P. 718-725.
8. G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data structure for soft objects. The Visual Computer.-1986.-2(4)-P. 227-234.
9. Bloomenthal J. Skeletal Design of Natural Forms. Doctoral dissertation. University of Calgary. Department of Computer Science.-1995.
10. Tuy, H. and Tuy, L. Direct 2-D Display of 3-D Objects, IEEE Computer Graphics and Applications 4, 10 (October 1984), P. 29-33.
11. K. Perlin, E. M. Hoffert. Hypertexture. Proceedings of the 1989 ACM SIGGRAPH conference, Volume 23, Issue 3 (July 1989), P. 253 – 262.
12. D. Karla and A.H. Barr. Guaranteed ray intersections with implicit surfaces. Computer Graphics, 23:297-306, November 1989. 13.
13. J. C. Hart. Sphere tracing: a geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. The Visual Computer, 12:527-545, 1994.
14. D. Mitchel. Robust ray intersection with interval arithmetic. In Proceedings on Graphics Interface 1990, P. 68-74. 1990.
15. A. Sherstyuk. Fast ray tracing of implicit surfaces. In Implicit Surfaces'98.-June 1998.-P. 145-153.
16. Вяткин С. И. Моделирование сложных поверхностей с применением функций возмущения // Автометрия, 2007, т. 43, № 3. С. 40–47.

17. M.C. Lin, "Efficient Collision Detection for Animation and Robotics", PhD thesis, Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, University of California, Berkeley, USA, 1993
18. D. Baraff, "Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies", in Computer Graphics Proceedings, ACM SIGGRAPH, vol. 23, pp. 223-232, 1989
19. D. Baraff, "Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies", in Computer Graphics Proceedings, Annual Conf. Series. ACM SIGGRAPH, pp. 23-34, 1994
20. Gregory, M. Lin, et al. "H-Collide: A Framework for Fast and Accurate Collision Detection for Haptic Interaction". IEEE Virtual Reality, 1999
21. J. K. Hahn. "Realistic animation of rigid bodies". ACM Computer Graphics, 22(4):pp. 299-308, 1988
22. B.V. Herzen, A.H. Barr, and H.R. Zatz. "Geometric collisions for time-dependent parametric surfaces". ACM Computer Graphics, 24(4), August 1990
23. T. Duff. "Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry". ACM Computer Graphics, 26(2):pp. 131-139, 1992
24. C. Hoffmann. "Geometric and solid modeling". Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, CA, 1989
25. Pentland and J. Williams. "Good vibrations: modal dynamics for graphics and animation". ACM Computer Graphics, 23(3):pp. 185-192, 1990
26. Savchenko V.V., Pasko A.A. "Collision detection for functionally defined deformable objects": The First International Workshop on Implicit Surfaces (Grenoble, France, April 18-19, 1995) /Eds. B.Wyvill and M.P. Gascuel: Eurographics-INRIA, pp. 217-221, 1995
27. D. C. Ruspini, K. Kolarov, and O. Knatib. "The haptic display of complex graphical environment". Proceedings of SIGGRAPH 97, vol. 1, pp. 295-301, August 1997
28. Vyatkin S.I., Dolgovesov B.S. Collision Detection of Functionally Defined Objects for Constant Time // Proc. of 15-th International Conference on Computer Graphics GraphiCon '2005.-(Novosibirsk.-2005).-P. 164-169.
29. Вяткин С. И. Метод бинарного поиска элементов изображения функционально заданных объектов с применением графических акселераторов // Автометрия, Том 50, Номер 6, 2014, С. 89-96.

### References:

1. Blinn J., A generation of algebraic surface drawing // ACM Transactions on Graphics, 1(3): July 1982, P. 235-256.
2. Bloomenthal J., Shoemake K. "Convolution surfaces", SIGGRAPH'91, Computer Graphics,-1991.-Vol.25.-No.4.-P 251-256.
3. G. Sealy, G. Wyvill. Smoothing of three dimensional models by convolution. In Computer Graphics International'96.- June 1996.-P 184-190.
4. McCormack J., Sherstyuk A. Creating and rendering convolution surfaces. Computing Graphics Forum.-1998.-Vol. 17.-No.2.-P 113-120.
5. J. F. Blinn. A generation of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics.-July 1982.-1(3)-P. 235-256.
6. S. Muraki. Volumetric shape description of range data using "blobby model". Computer Graphics.-July 1991.-25(4)-P. 227-235.

7. H. Nishimura, M. Hirai, T. Kawai, T. Kawata, I. Shirakawa, and K. Omura. Object modelling by distribution function and a method of image generation. The Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan.-1985.-J68-D (4)-P. 718-725.
8. G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data structure for soft objects. The Visual Computer.-1986.-2(4)-P. 227-234.
9. Bloomenthal J. Skeletal Design of Natural Forms. Doctoral dissertation. University of Calgary. Department of Computer Science.-1995.
10. Tuy, H. and Tuy, L. Direct 2-D Display of 3-D Objects, IEEE Computer Graphics and Applications 4, 10 (October 1984), P. 29-33.
11. K. Perlin, E. M. Hoffert. Hypertexture. Proceedings of the 1989 ACM SIGGRAPH conference, Volume 23, Issue 3 (July 1989), P. 253 – 262.
12. D. Karla and A.H. Barr. Guaranteed ray intersections with implicit surfaces. Computer Graphics, 23:297-306, November 1989.
13. J. C. Hart. Sphere tracing: a geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. The Visual Computer, 12:527-545, 1994.
14. D. Mitchel. Robust ray intersection with interval arithmetic. In Proceedings on Graphics Interface 1990, P. 68-74. 1990.
15. A. Sherstuyk. Fast ray tracing of implicit surfaces. In Implicit Surfaces'98.-June 1998.-P. 145-153.
16. Vyatkin S. I. Modelirovanie slozhnykh poverkhnostei s primeneniem funktsii vozmushcheniya // Avtometriya, 2007, t. 43, № 3. С. 40–47.
17. M.C. Lin, "Efficient Collision Detection for Animation and Robotics", PhD thesis, Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, University of California, Berkeley, USA, 1993
18. D. Baraff, "Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies", in Computer Graphics Proceedings, ACM SIGGRAPH, vol. 23, pp. 223-232, 1989
19. D. Baraff, "Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies", in Computer Graphics Proceedings, Annual Conf. Series. ACM SIGGRAPH, pp. 23-34, 1994
20. Gregory, M. Lin, et al. "H-Collide: A Framework for Fast and Accurate Collision Detection for Haptic Interaction". IEEE Virtual Reality, 1999
21. J. K. Hahn. "Realistic animation of rigid bodies". ACM Computer Graphics, 22(4):pp. 299-308, 1988
22. B.V. Herzen, A.H. Barr, and H.R. Zatz. "Geometric collisions for time-dependent parametric surfaces". ACM Computer Graphics, 24(4), August 1990
23. T. Duff. "Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry". ACM Computer Graphics, 26(2):pp. 131-139, 1992
24. C. Hoffmann. "Geometric and solid modeling". Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, CA, 1989
25. Pentland and J. Williams. "Good vibrations: modal dynamics for graphics and animation". ACM Computer Graphics, 23(3):pp. 185-192, 1990
26. Savchenko V.V., Pasko A.A. "Collision detection for functionally defined deformable objects": The First International Workshop on Implicit Surfaces (Grenoble, France, April 18-19, 1995) /Eds. B.Wyvill and M.P. Gascuel: Eurographics-INRIA, pp. 217-221, 1995

27. D. C. Ruspini, K. Kolarov, and O. Knatib. "The haptic display of complex graphical environment". Proceedings of SIGGRAPH 97, vol. 1, pp. 295-301, August 1997
28. Vyatkin S.I., Dolgovesov B.S. Collision Detection of Functionally Defined Objects for Constant Time // Proc. of 15-th International Conference on Computer Graphics GraphiCon '2005.-(Novosibirsk.-2005).-P. 164-169.
29. Vyatkin S. I. Metod binarnogo poiska elementov izobrazheniya funktsional'no zadannykh ob"ektov s primeneniem graficheskikh akseleratorov // Avtometriya, Tom 50, Nomer 6, 2014, S. 89-96.